Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Основная идея метода

Традиционно система линейных уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{01}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{0n}X_n = b_0 \\ a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}X_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Или в компактной форме:

$$\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{ki}X_k = b_k \right), \quad \text{где : k – индекс строки, i – индекс переменной}$$

Основой решения системы линейных уравнений методом Гаусса, является последовательное исключение независимых переменных из строк системы. Такое исключение позволяет привести исходную систему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{cases} a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{0n}X_n = b_0 \\ 0 + a^*_{11}X_1 + a^*_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a^*_{1n}X_n = b^*_1 \\ 0 + 0 + a^*_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a^*_{2n}X_n = b^*_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + 0 + 0 + 0 + a^*_{nn}X_n = b^*_n \end{cases} \quad (2)$$

Если оказывается возможным такое преобразование, то такую эквивалентную систему будем называть системой уравнений в форме Гаусса или просто Гауссовой системой. Разрешить систему уравнений в форме Гаусса достаточно просто. Для этого вначале следует найти корень Xn:

$$X_n = \frac{b^*_n}{a^*_{nn}}$$

После чего, последовательно от k = n-1 до k = 0 применяется формула, которая использует уже вычисленные значения корней:

$$X_k = \frac{b^*_k - \sum_{i=k+1}^{n} a^*_{ki} X_k}{a^*_{kk}}, \quad \text{где}: 0 \le k < n \qquad (3)$$

Таким образом, основной задачей решения системы уравнений становится задача по последовательному исключению независимых переменных из строк системы уравнений, причем таким образом, чтобы после необходимых исключений новая система (2) оставалась эквивалентной исходной (1). Метод Гаусса предполагает решать названную задачу исключения последовательно, исключая в каждой последующей строке системы уравнений очередную независимую переменную. Такой метод становится возможным, если вспомнить, что любое равенство сохраняется если:

- обе части равенства умножить или поделить на одну и ту же величину;
- к одному равенству добавить или вычесть другое равенство.

Если такие операции применить к некоторой строке системы линейных уравнений и полученным результатом заменить исходную строку, то образованная система уравнений будет эквивалентна исходной, то есть, будет иметь такие же корни, как и исходная. Рассмотрим сформулированную идею метода Гаусса по отдельным шагам.

Метод исключения произвольной переменной из указанного уравнения в системе линейных уравнений.

Для определенности обозначим смысл используемых индексов:

- n – Число строк в системе линейных уравнений;
- m – Индекс независимой переменной X, которая подлежит исключению;
- k – Индекс строки системы уравнений, в которой исключается переменная Xm.

Для исключения переменной Xm из уравнения с k - тым строчным индексом последовательно выполним следующее:

Шаг 1.

Умножим уравнение с m - тым строчным индексом на величину:

$$\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

В результате такого умножения получим:

$$a_{m0}\frac{a_{km}}{a_{mm}}X_0 + a_{m1}\frac{a_{km}}{a_{mm}}X_1 + \cdots + a_{mm}\frac{a_{km}}{a_{mm}}X_k + \cdots + a_{mn}\frac{a_{km}}{a_{mm}}X_n = b_m\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

или в компактном виде:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{mi}\frac{a_{km}}{a_{mm}}X_i = b_k\frac{a_{km}}{a_{mm}}, \quad \text{где}: 0 < k \le n \qquad (4)$$

Шаг 2.

Вычтем уравнение, которое мы получили в результате выполнения шага 1 из исходного уравнения с k – тым строчным индексом. В результате вычитания одного равенства из другого, получим следующее:

$$(a_{k0} - a_{m0}\frac{a_{km}}{a_{mm}})X_0 + \cdots + (a_{km} - a_{mm}\frac{a_{km}}{a_{mm}})X_k + \cdots + (a_{kn} - a_{mn}\frac{a_{km}}{a_{mm}})X_n = b_k - b_m\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

или в компактном виде:

$$\sum_{i=0}^{n}(a_{ki} - a_{mi}\frac{a_{km}}{a_{mm}})X_i = b_k - b_m\frac{a_{km}}{a_{mm}} \qquad (5)$$

Если, для наглядности, ввести обозначения:

$$a^*_{ki} = a_{ki} - a_{mi}\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

$$b^*_k = b_k - b_m\frac{a_{km}}{a_{mm}}$$

То выражение (5) можно записать в еще более компактной форме:

$$\sum_{i=0}^{n} a^*_{ki}X_i = b^*_k, \quad \text{где}: 0 < k \le n \qquad (5^*)$$

Обратим внимание, что коэффициент при переменной Xm в этом выражении всегда будет равен нулю:

$$(a_{km} - a_{mm}\frac{a_{km}}{a_{mm}}) \equiv 0$$

Поскольку этот нулевой коэффициент является сомножителем для переменной Xm, то переменная Xm фактически исключается из выражения (5).

Шаг 3.

Кроме того, выражение (5), полученное на шаге 2, является линейно – зависимым вариантом исходного уравнения с k - тым строчным индексом, а следовательно это выражение может заменить собою исходное уравнение и при этом новая система уравнений останется эквивалентной исходной системе уравнений.

Метод построения треугольной матрицы путем последовательного исключения переменных.

Итак, теперь мы располагаем методом, который позволяет исключить любую переменную из любого уравнения системы линейных уравнений. Таким образом, преобразование системы линейных уравнений к виду (2) можно осуществить путем последовательного применения этого метода. Рассмотрим такое последовательное исключение:

Для начала, в исходной системе уравнений (см. 1) исключим переменную X0 из всех уравнений кроме уравнения с нулевым строчным индексом. Это приведет нас к новой эквивалентной системе уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{00}X_0 & + a_{01}X_1 & + a_{02}X_2 & +..... & + a_{0n}X_n & = b_0 \\ 0 & + a^*_{11}X_1 & + a^*_{12}X_2 & +..... & + a^*_{1n}X_n & = b^*_1 \\ 0 & + a^*_{21}X_1 & + a^*_{22}X_2 & +..... & + a^*_{2n}X_n & = b^*_2 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & + a^*_{n1}X_1 & + a^*_{n2}X_2 & +..... & + a^*_{nn}X_n & = b^*_n \end{cases}$$

Обратим внимание, что некоторая часть в этой системе уравнений, а именно:

$$\begin{cases} a^*_{11}X_1 & + a^*_{12}X_2 & +..... & + a^*_{1n}X_n & = b^*_1 \\ a^*_{21}X_1 & + a^*_{22}X_2 & +..... & + a^*_{2n}X_n & = b^*_2 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a^*_{n1}X_1 & + a^*_{n2}X_2 & +..... & + a^*_{nn}X_n & = b^*_n \end{cases}$$

стала независимой от переменной X0, а, следовательно, может быть разрешена как самостоятельная система линейных уравнений. Назовем такую систему уравнений подсистемой. Особо следует отметить, что размерность такой подсистемы стала на единицу меньше по отношению к исходной системе. Для нас, такое понижение размерности, может означать, что последовательное повторение процедуры исключения очередной переменной в каждой последующей подсистеме, обязательно приведет к финишной подсистеме с размерностью равной единице, а именно:

$$a^*_{nn} X_n = b^*_n$$

Очевидно, что финишная подсистема разрешима как обычное уравнение, а итоговая система уравнений, включающая финишную подсистему, будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{0n}X_n = b_0 \\ a^*_{11}X_1 + a^*_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a^*_{1n}X_n = b^*_1 \\ a^*_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a^*_{2n}X_n = b^*_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^*_{nn}X_n = b^*_n \end{cases}$$

Таким образом, в результате последовательного исключения одной переменной в каждой последующей подсистеме мы получили ответ на задачу, которая была сформулирована как выражение (2) и с помощью формулы (3) теперь можем вычислить все корни системы линейных уравнений (1).

Особые случаи при построении треугольной матрицы методом Гаусса.

Известно, что для разрешимости систем линейных уравнений важным условием является линейная независимость входящих в систему уравнений. Это требование можно сформулировать как требование противоположное условию линейной зависимости уравнений.
Итак, два линейных уравнения со строчными индексами (k) и (m) являются линейно зависимыми, если для всех индексов столбцов (i) выполняются следующие условия:

$$a_{ki} = s * a_{mi}$$

$$b_k = s * b_m$$ где S это некоторая константа.

Другими словами, такие два уравнения фактически идентичны, поскольку из одного получается другое путем применения простого масштабирования.

Однако когда система линейных уравнений представлена цифровыми коэффициентами, то заранее обнаружить линейную зависимость двух или более уравнений достаточно сложно, особенно при визуальной оценке.
Таким образом, необходимо рассмотреть, каковыми могут быть последствия применения метода Гаусса, в случае появления в системе линейно зависимых уравнений.